

Génie mécanique

Partie II: Cours No 5.2
Elasticité- Plasticité

V.Michaud

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

EPFL

exo 5 d -

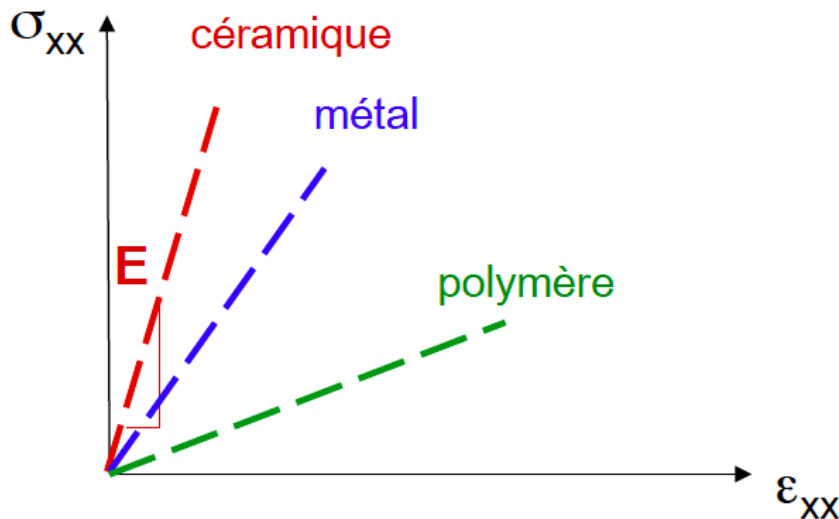
$$\begin{aligned}\Delta V &= V_{fin} - V_{in} = L_f \times r_f^2 - L_i \times r_i^2 \\ &= 35.46 \cdot 1000 \times (3.484)^2 - 35000 \times 3.5^2 \\ &= 1672 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_0 (1 - 2\nu) \varepsilon_{xx} = L_i r_i^2 (1 - 2 \cdot 0.35) 0.013 \\ &= 1672 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Rappels

ϵ [-] souvent %

- Pour l'étude des processus mis en jeu lors de la déformation des matériaux, on considère des **contraintes (force par unité de surface)** et des **déformations (variation de longueur normalisée par la longueur initiale)**.
- Dans le régime d'élasticité linéaire, la contrainte en traction uni-axiale est reliée à la déformation le long de cet axe par une relation linéaire de **coefficient de proportionnalité E , est appelé module d'Young ou module d'élasticité**.
- Ce module a pour dimension **$\text{Pa} = \text{N.m}^{-2}$** , (qui est aussi écrit en **J.m^{-3}** quand on considère l'énergie, car $1\text{J}=1\text{N.m}$ par définition). Il varie de plusieurs ordres de grandeurs selon les matériaux, de quelques **MPa** pour certains polymères, a des centaines de **GPa** pour les céramiques (quelques dizaines pour les métaux).



- E est lié à l'énergie de liaison entre les atomes
- E représente la rigidité d'un matériau: plus E est grand, plus il est rigide
- E a la dimension d'une contrainte (Pa)

Rappels

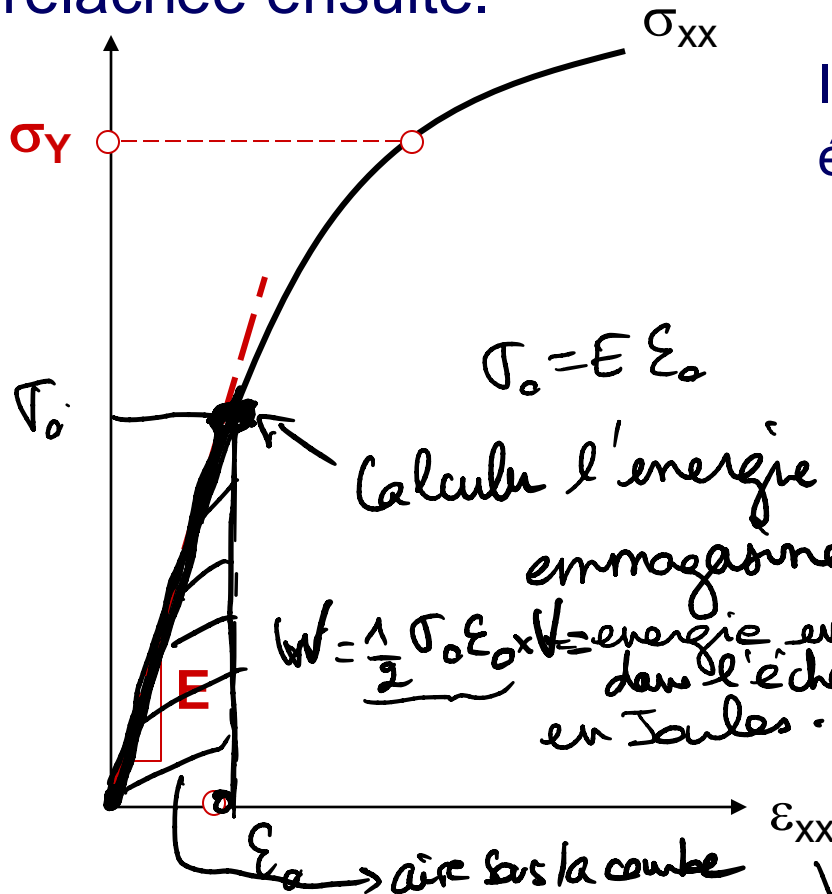
- *L'origine de l'élasticité linéaire se trouve au niveau des liaisons des atomes et la valeur de E est directement reliée au potentiel d'interaction entre les atomes (donc au type de liaison et de la structure cristalline).*
- *Une élongation (ou contraction) selon une direction induit une déformation dans les directions transverses. Ceci est représenté par **le coefficient de Poisson**, relié aussi au changement de volume du matériau sous contrainte.*

Objectifs du cours

- Découvrir le principe de l'énergie élastique et voir comment on peut calculer l'énergie emmagasinée/restituée
- Découvrir la déformation plastique
- Découvrir quelques critères de choix des matériaux à l'aide des diagrammes d'Ashby

Stockage d'énergie

Si on déforme un matériau en restant dans le domaine élastique, le matériau revient à sa forme initiale quand on relâche la contrainte. L'énergie élastique est stockée pendant la déformation et relâchée ensuite.



Incrément de densité d'énergie élastique:

$$dw = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} \quad [\text{J/m}^3]$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{0x}}$$

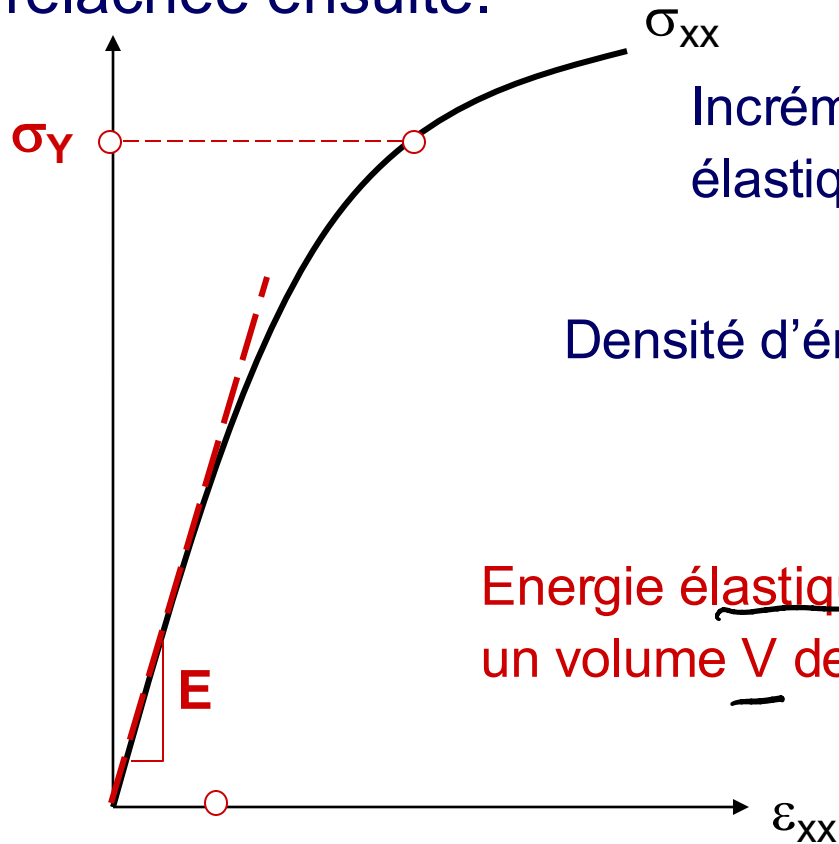
$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S_x}$$

$\sigma_0 = E \varepsilon_0$
 Calculer l'énergie emmagasinée
 $w = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \times V = \text{énergie emmagasinée dans l'échantillon en Joules.}$

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{\varepsilon_{xx}} F_x dL_x \\
 &= \int_0^{\varepsilon_{xx}} S_x \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} L_{0x} \\
 &= V \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} = V \int_0^{\varepsilon_{xx}} E \varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} \\
 W &= V E \times \frac{1}{2} \varepsilon_{xx}^2 = \frac{V}{2} E \varepsilon_{xx}^2
 \end{aligned}$$

Stockage d'énergie

Si on déforme un matériau en restant dans le domaine élastique, le matériau revient à sa forme initiale quand on relâche la contrainte. L'énergie élastique est stockée pendant la déformation et relâchée ensuite.



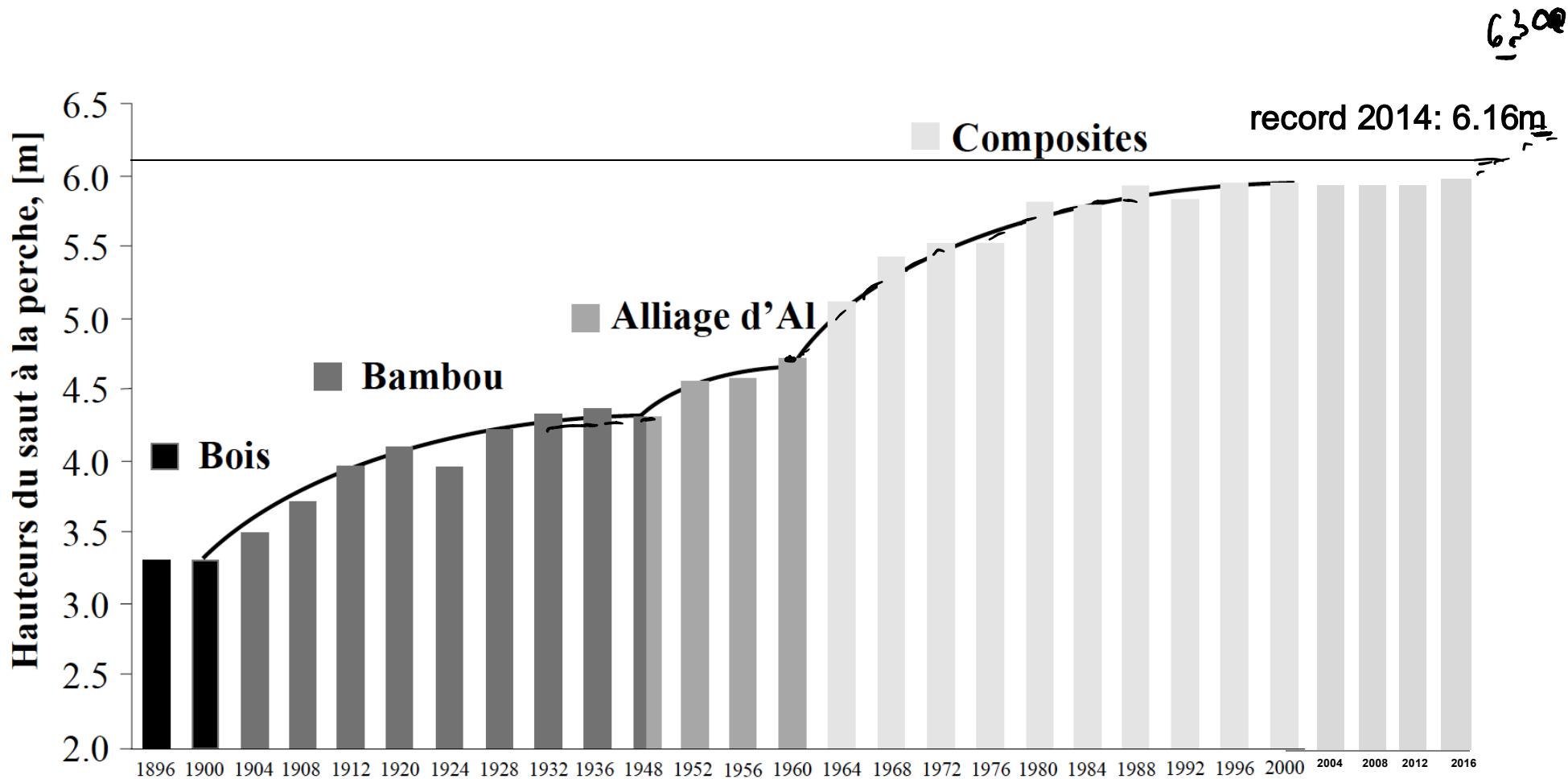
Incrément de densité d'énergie élastique: $dw = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx}$ [J/m³]

Densité d'énergie élastique: $w = \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}$
en J/m³

Energie élastique totale, pour un volume V de matériau :

$$W_{\text{tot}} = w \times V$$

Exemple : perche de saut

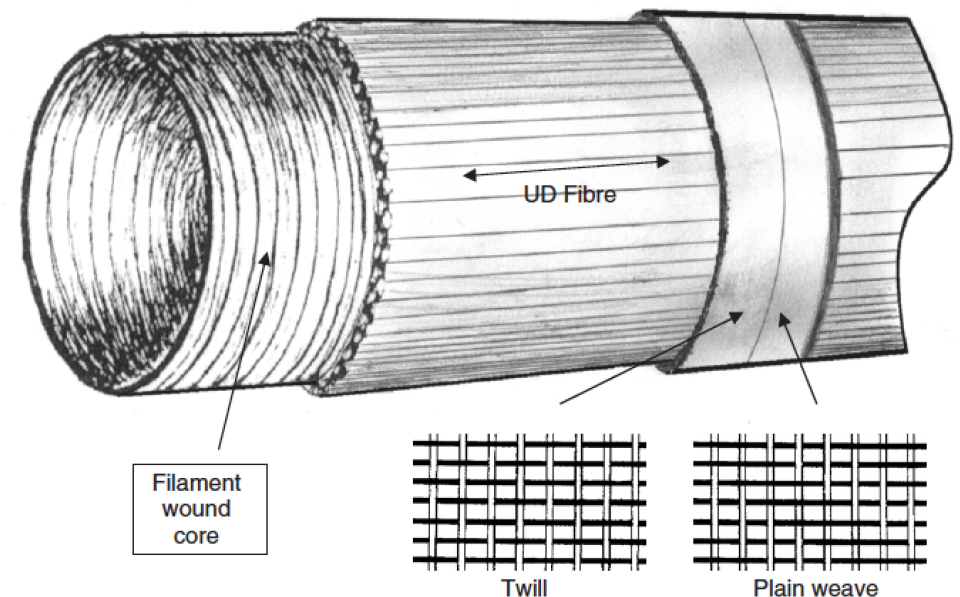


Performance aux Jeux Olympiques depuis 1896->2016

2015

Exemple : perche de saut

- 1- bois (Fresne, chataigner, chêne, cedre)
- 2- Bambou (1905)
- 3- Aluminium
- 4- Construction composite, sur un mandrin en alu qui se retire ensuite.



Autres exemples

Arc, cannes de Hockey..

Ressorts, bandes élastiques

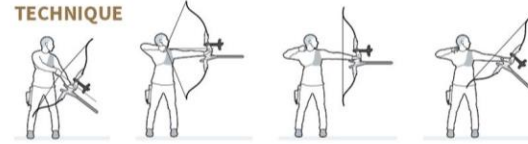


Le tir à l'arc demande de grandes réserves d'adresse et de concentration

pour tirer des flèches avec une précision sans faille sur des cibles placées à 70 mètres



TECHNIQUE



Placer la flèche Viser Relâcher la corde Finir son geste

CIBLE



Points: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

FORMAT DE COMPÉTITION

Classement

64 archers tirent chacun 72 flèches et sont classés de la 1ère à la 64e place en fonction de leurs points

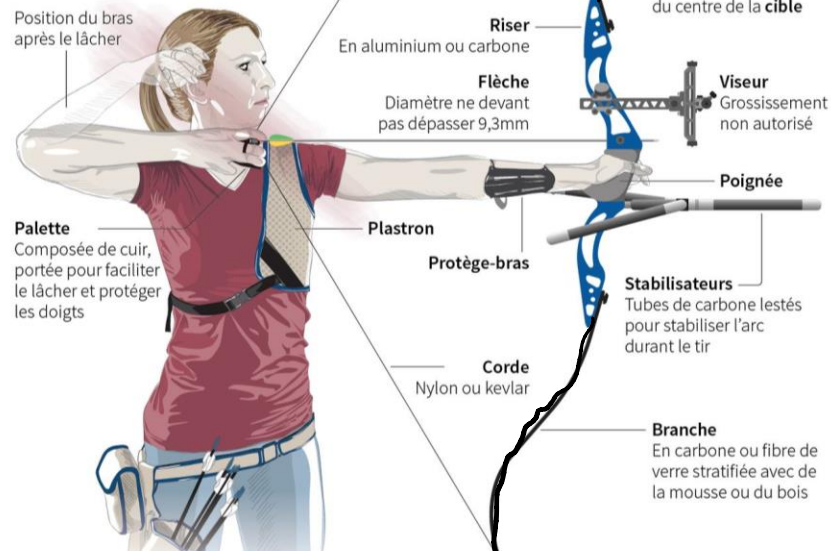
Eliminatoires

Le premier du classement affronte en face à face le 64e, le 2e du classement affronte le 63e, et ainsi de suite

Le gagnant passe au tour suivant, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux archers pour disputer la finale

LE BUT

est de tirer les flèches aussi près que possible du centre de la cible



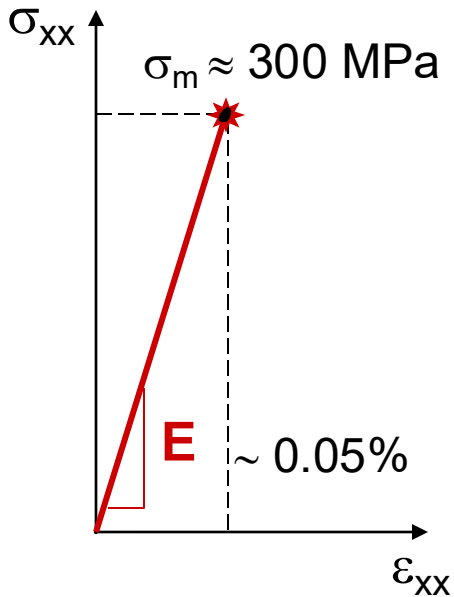
Sources: Comité international olympique; Tokyo2020; Sports: The Complete Visual Reference

Wen Foo, illustration principale par Catherine Tai, 12/05/2021

REUTERS

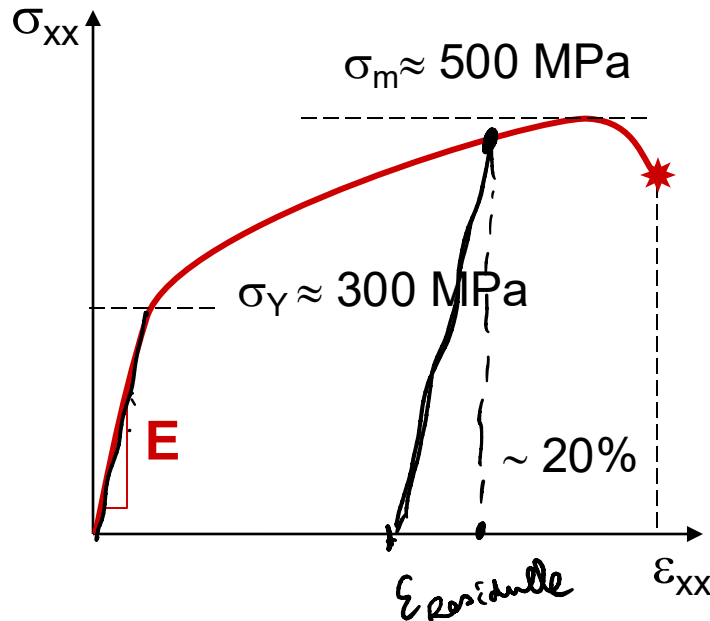
Comportement seulement élastique?

La plupart des matériaux ont un comportement mécanique beaucoup plus complexe que ne le décrit l'élasticité linéaire.



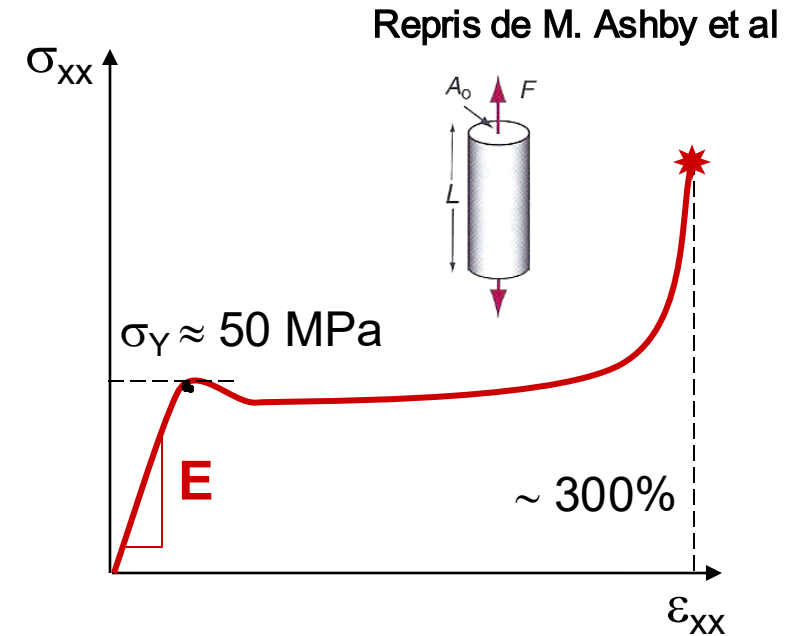
Céramiques

Comportement quasi-élastique jusqu'à la rupture. Très faible ductilité.



Métaux

Comportement élastique, puis plastique avec durcissement, striction et rupture. Bonne ductilité.

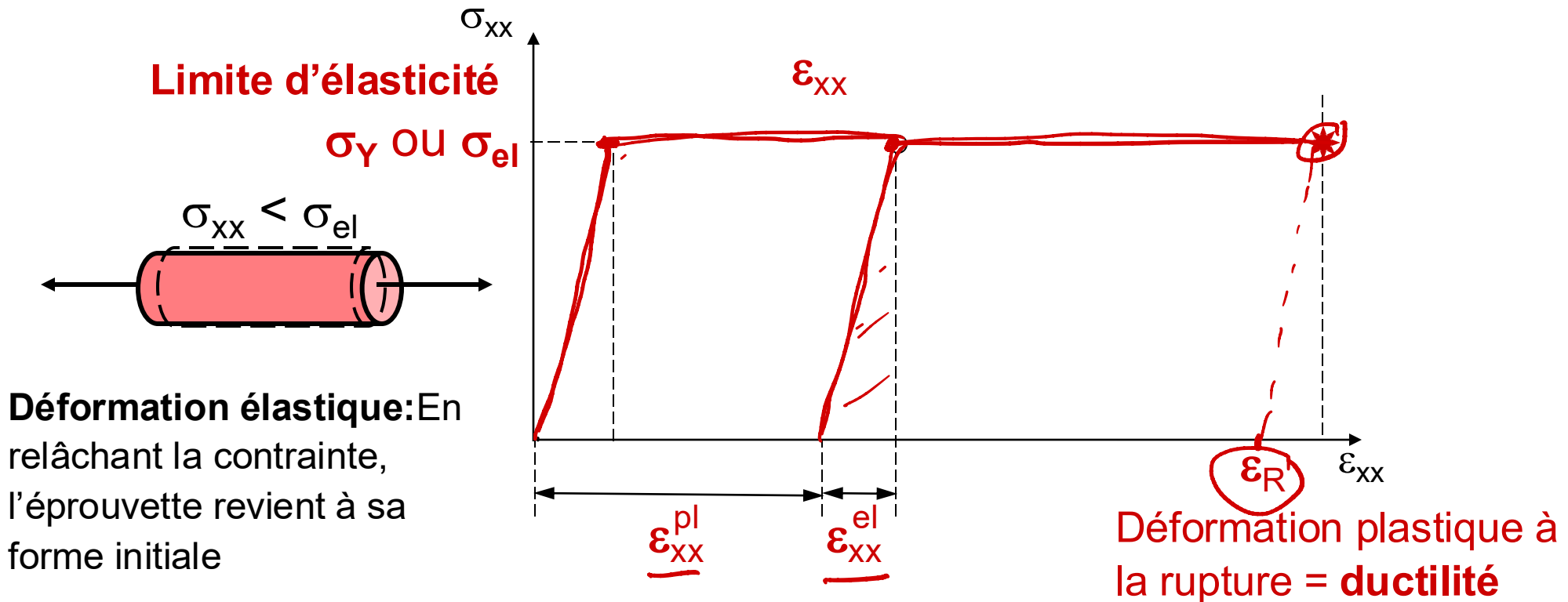


Polymères ductiles

Faible limite élastique, grande ductilité, durcissement final et rupture.

Plasticité des métaux

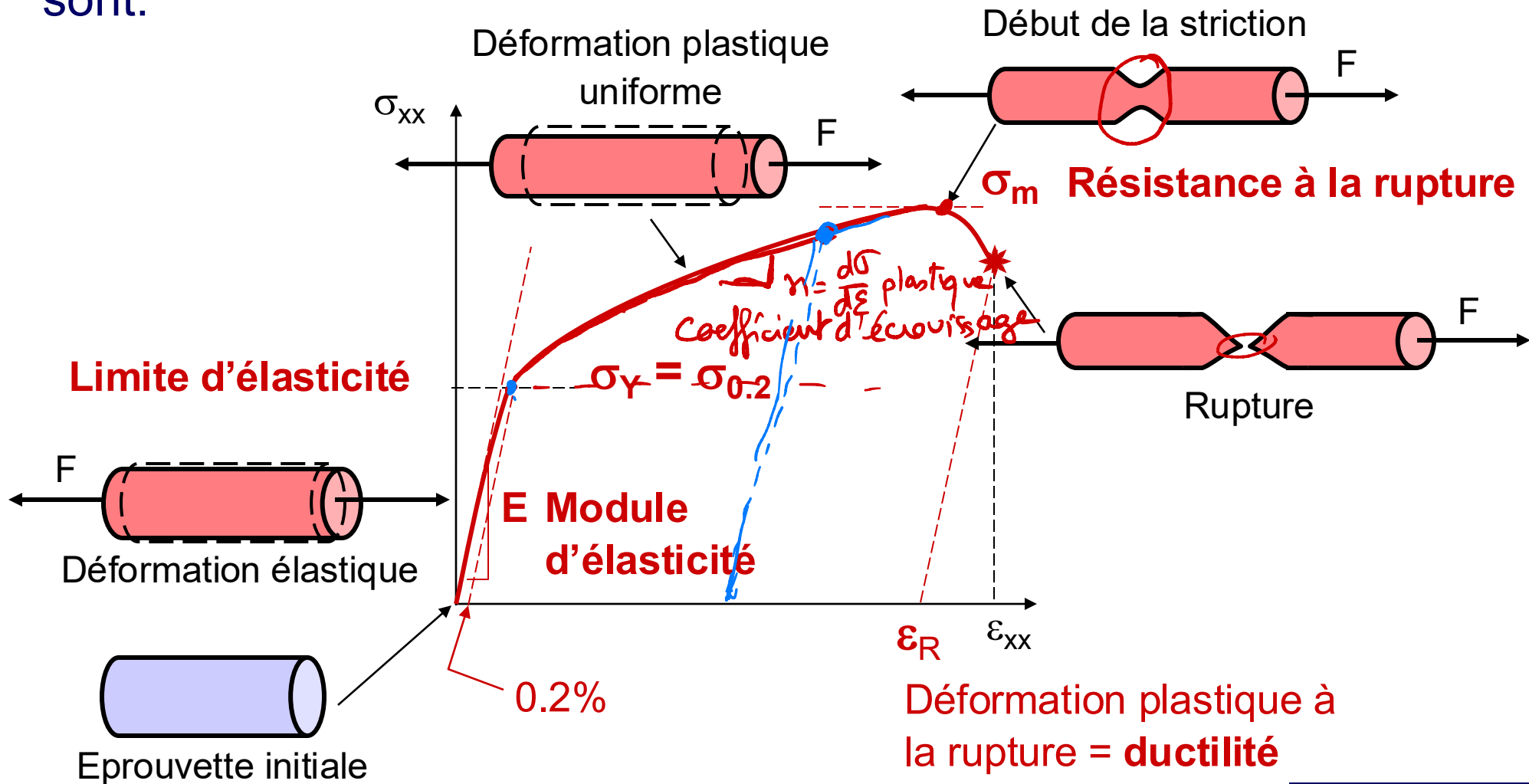
Pour un métal, **comportement idéalisé élastique-plastique**, a la courbe de traction suivante:



Déformation plastique: Au-delà de $\epsilon_{xx} = \sigma_{el}/E$, la contrainte est constante et le corps se déforme plastiquement. Une fois la contrainte relâchée, l'éprouvette n'a plus la même forme et garde une déformation plastique résiduelle.

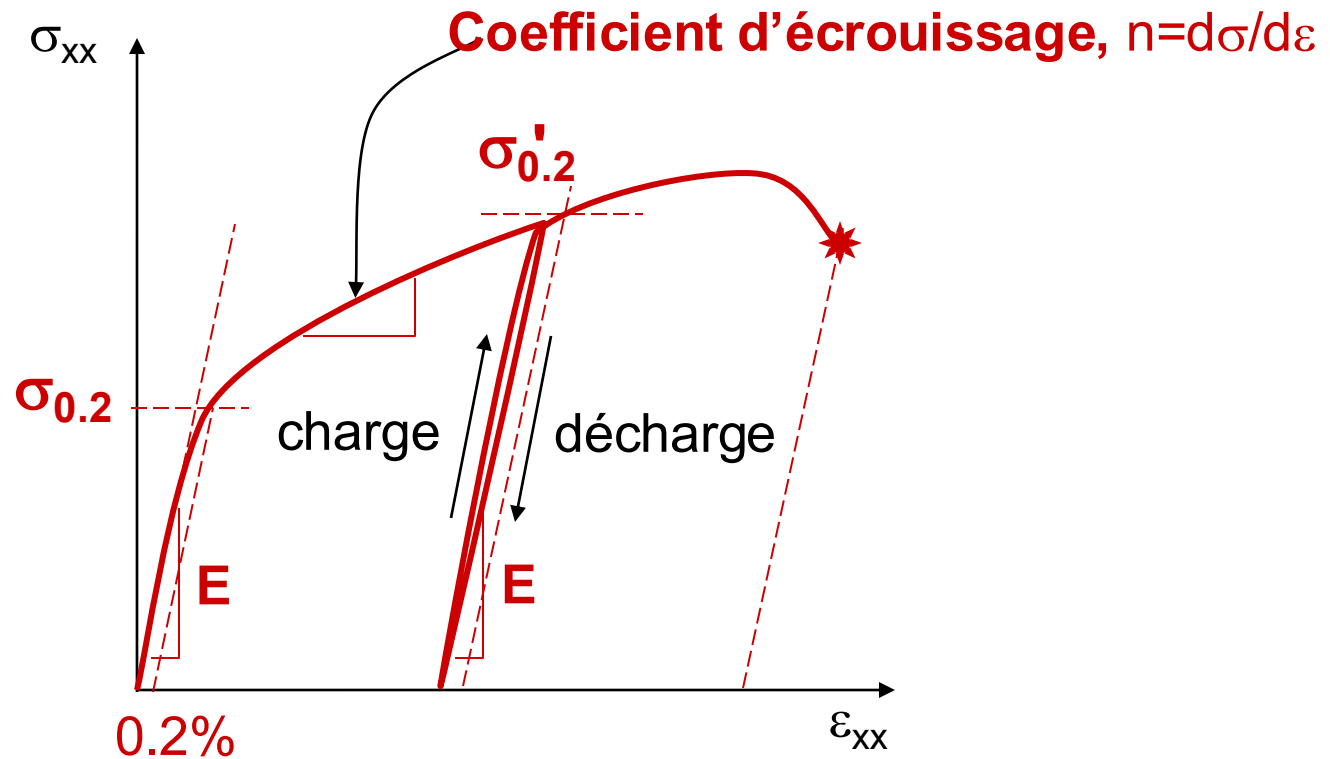
Plasticité des métaux

Pour un métal typique, les étapes de la déformation en traction sont:



Plasticité des métaux

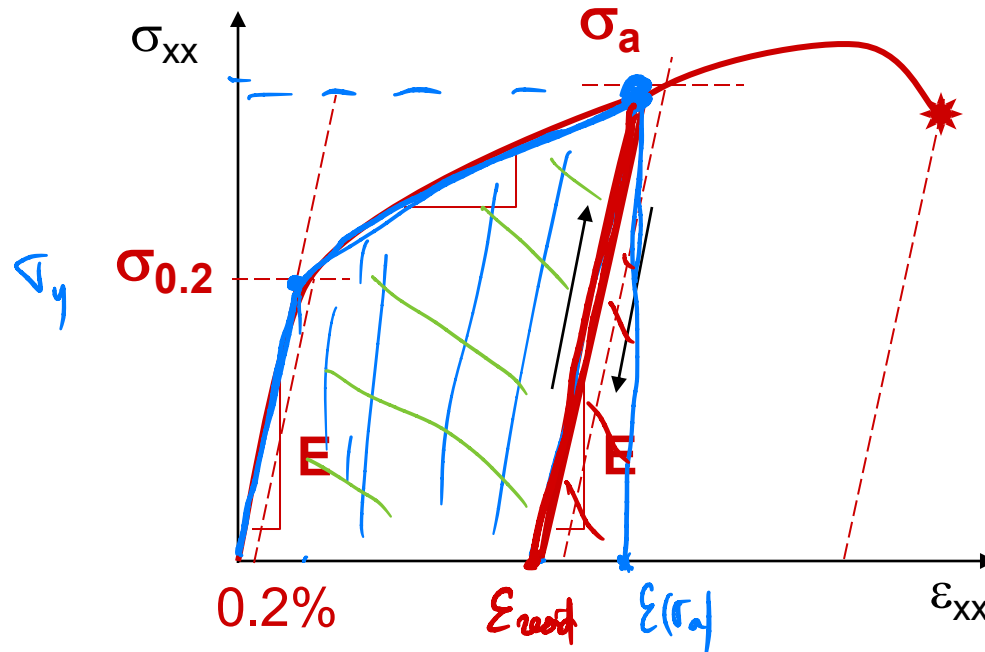
Lors de décharges/recharges, la limite élastique augmente: il y a **durcissement** du matériau, que l'on appelle **écrouissage**



Si E est quasiment fixé pour un type de matériau, tous les autres paramètres dépendent de la **microstructure**.

Energie dissipée et énergie restituée

Si la limite d'élasticité est dépassée, la déformation non-élastique dissipe de l'énergie, qui ne sera pas restituée à la décharge.

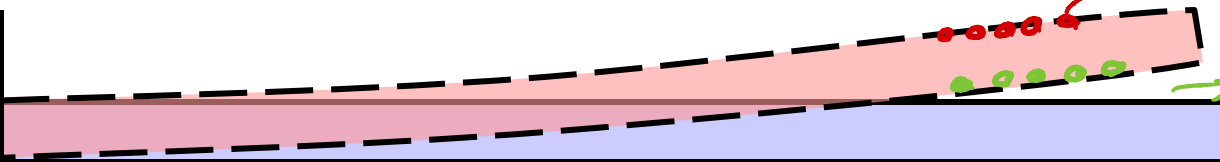
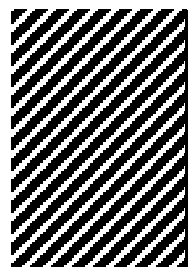


aire bleu: énergie
ds le matériau
sous charge σ_a
triangle rouge
énergie restituée
lors de la décharge
vert: le reste
→ ds le matériau
→ dissipée sous forme
de chaleur

L'énergie dissipée après relachement de la contrainte à σ_a est donnée par l'aire colorée en rouge sous la courbe. L'énergie restituée est donnée par l'aire colorée en vert.

Critères de choix des matériaux

Une situation réelle de déformation élastique:



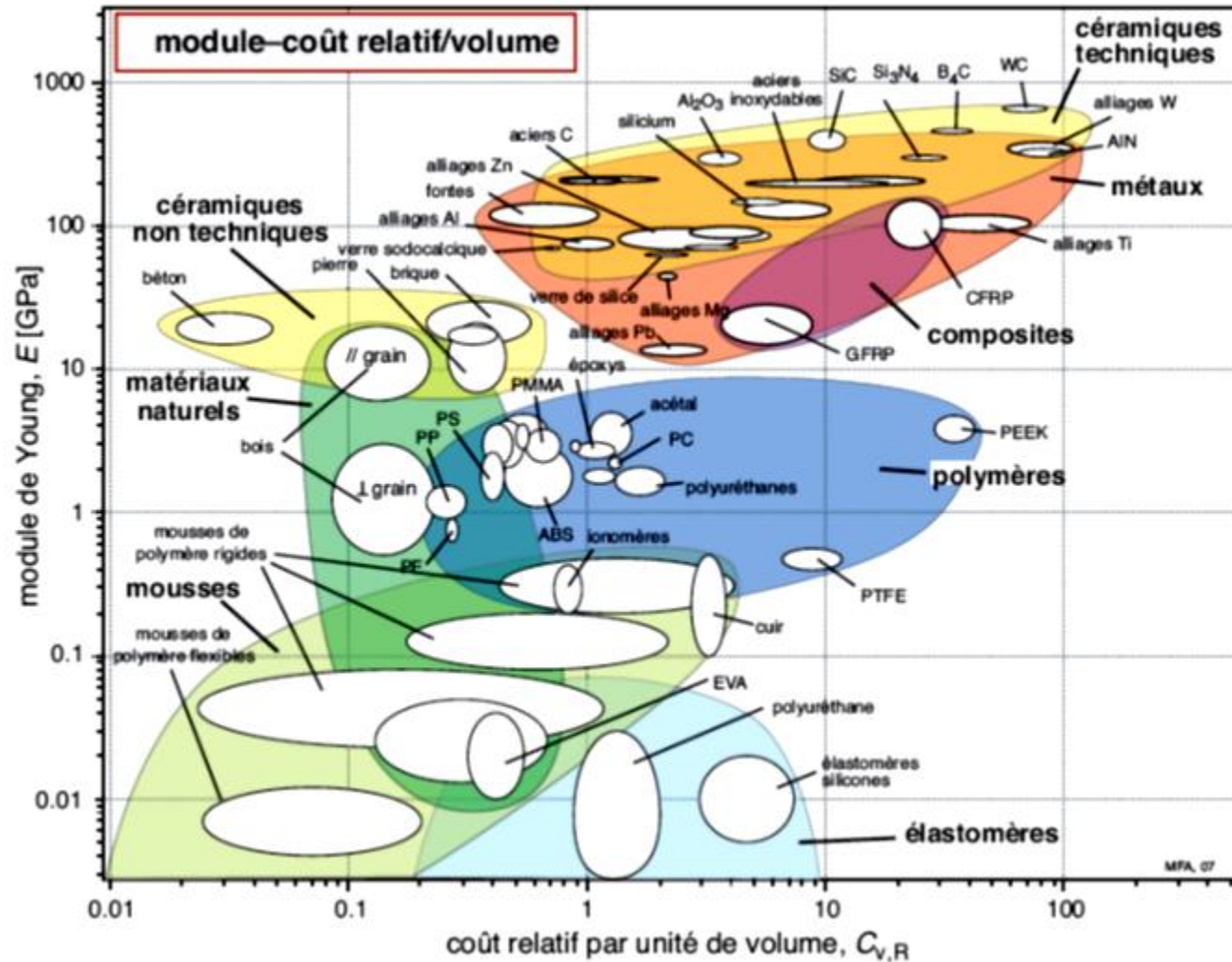
- Compression

→ traction

Quelles sont les contraintes "ressenties" par les atomes ?

Choix des matériaux

... ou du prix.



Type de sollicitation : traction

Le choix d'un matériau dépend de plusieurs facteurs: type de sollicitation, charge maximum, prix, etc. On peut définir un **indice de rigidité spécifique**:

Exemple: Tige rigide, longueur initiale L_0 , aire A , on veut que son élongation Δl soit inférieure à une valeur donnée pour une charge donnée, mais avec une masse m la plus faible possible:

$$\Delta l < \text{valeur fixée}$$

$$m = A L_0 \rho$$

$$\frac{F}{A} = \sigma = E \frac{\Delta l}{L_0}$$

$$A = \frac{m}{L_0 \rho} = \frac{F}{E} \frac{L_0}{\Delta l}$$

$$m = \frac{F}{E} \Delta l L_0^2 \rho = \frac{F}{\Delta l} L_0^2 \left(\frac{\rho}{E} \right)$$

indice $\frac{E}{\rho} =$ rigidité spécifique

choix des charges



matériaux



Type de sollicitation : traction

Le choix d'un matériau dépend de plusieurs facteurs: type de sollicitation, charge maximum, prix, etc. On peut définir un **indice de rigidité spécifique** E/ρ qui permet de comparer les matériaux en traction:

$$\frac{E}{\rho} \quad \text{Acier: } \underline{25}$$
$$\quad \quad \quad \text{Al : } \underline{26}$$

Exemple: Tige rigide, longueur initiale L_0 , aire A , on veut que son élongation Δl soit inférieure à une valeur donnée pour une charge donnée, mais avec une masse m la plus faible possible:

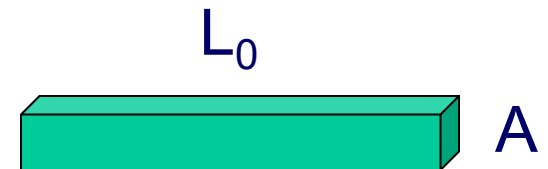
$$m = AL_0\rho$$

$$F/A = E \Delta l/L_0$$

On peut éliminer A pour avoir

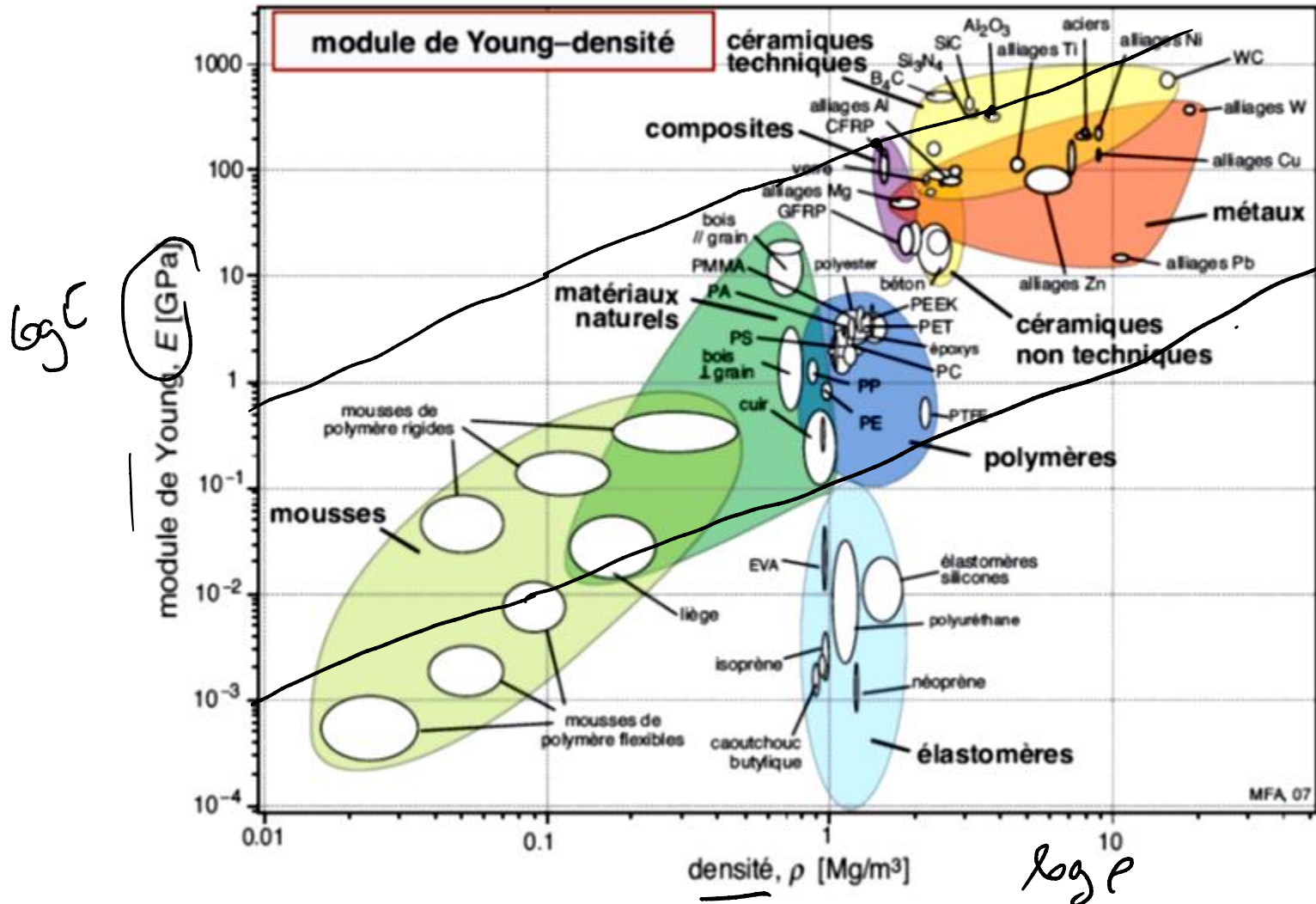
$$m = F/\Delta l (L_0)^2(\rho/E)$$

Il faut que E/ρ soit le plus grand possible. Et deux matériaux avec le même indice ont des propriétés équivalentes.



Propriétés élastiques des matériaux

Les cartes d'Ashby permettent de faire une présélection de la rigidité d'un matériau suivant son mode de sollicitation.



$$\frac{E}{\rho} \text{ similaire}$$

$$\Delta \log / \log$$

$$\log \frac{E}{\rho} = A$$

$$\log E - \log \rho = A$$

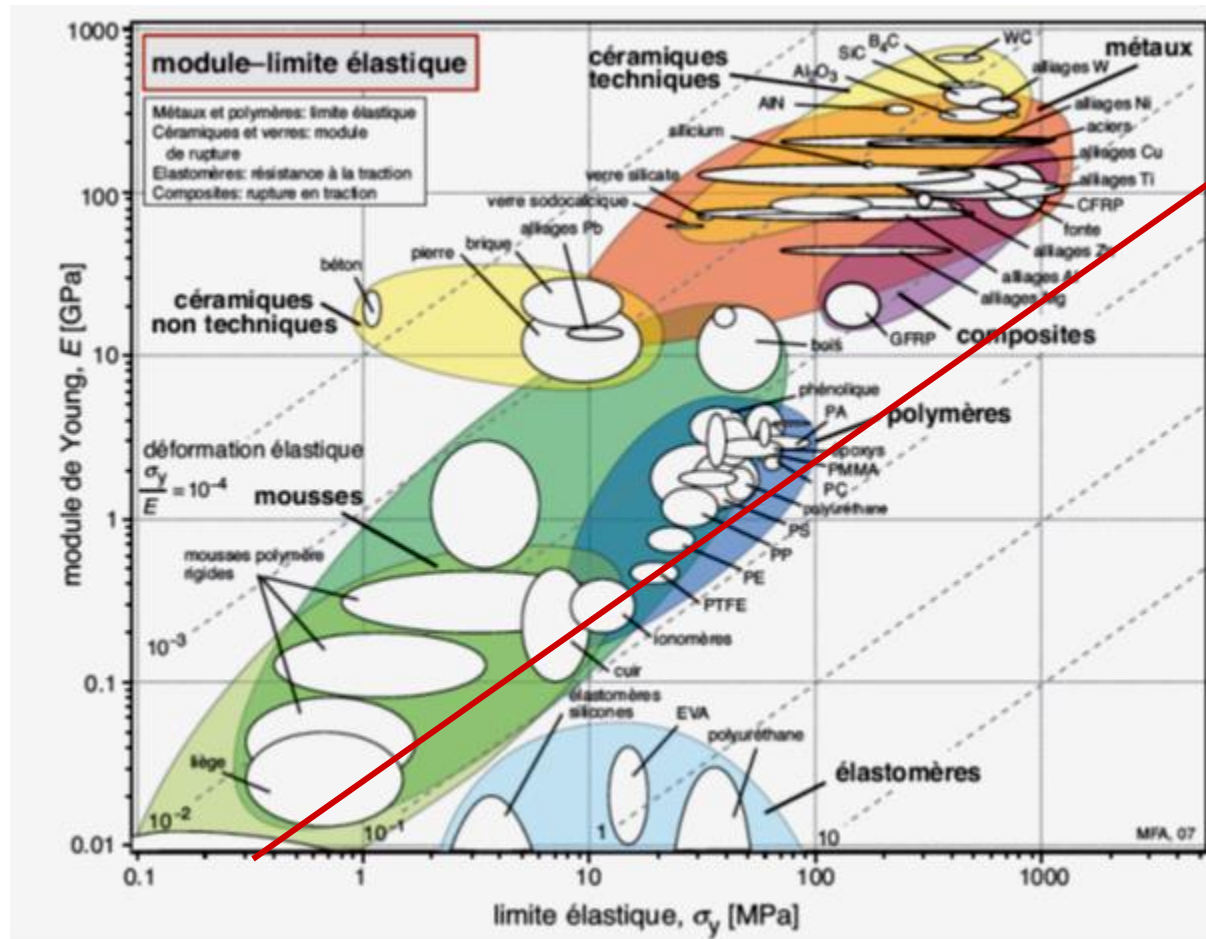
$$y = x + A$$

Limite d'élasticité théorique des matériaux

La **limite d'élasticité** σ_{el} (ou σ_Y) théorique peut être calculée, elle correspond à la force max ($E/27$ calculé par le potentiel de Lenards Jones, $E/15$ donné dans le livre d'Ashby avec un autre potentiel).

Limite d'élasticité des matériaux

La **limite d'élasticité** σ_{el} (ou σ_Y) théorique peut être calculée, elle correspond à la force max ($E/27$ calculé par le potentiel de Leenards Jones, $E/15$ donné dans le livre d'Ashby avec un autre potentiel). En pratique elle est beaucoup plus faible, et varie beaucoup pour un même matériau. Pourquoi?



$$\sigma_m^{LJ} = \frac{E}{27} = 0.037E$$

Résumé

- L'élasticité permet de stocker et restituer de l'énergie.
- La plasticité des matériaux correspond à une déformation non réversible, qui dissipe de l'énergie.
- Les cartes d'Ashby permettent de choisir les matériaux pour un type de sollicitation donné, qui minimisent par exemple la masse.

A retenir du cours d'aujourd'hui

- *Connaître les définitions de limite d'élasticité, plasticité, ductilité, écrouissage.*
- *Savoir, à partir d'une courbe contrainte-déformation, retrouver le module E , la limite d'élasticité, le taux d'écrouissage, l'énergie dissipée, l'énergie restituée.*
- *Savoir, à partir de cartes d'Ashby, retrouver des matériaux équivalents en rigidité spécifique.*